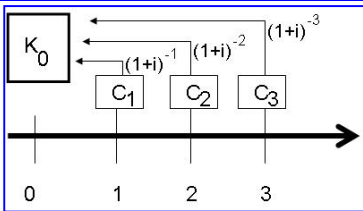


Finanzmathematik

Grundlagen der Finanzmathematik

- Aufzinsung
- Abzinsung
- Abzinsen von Verbindlichkeiten
- Rentenendwert
- Rentenbarwert
- Annuität



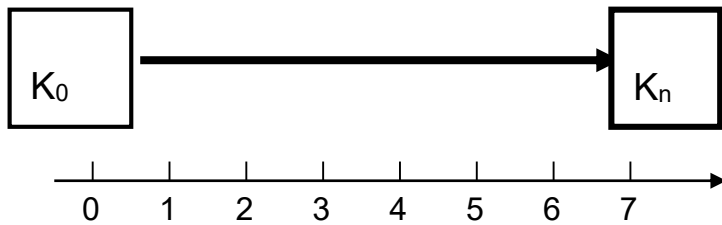
Finanzmathematik

Aufzinsung - Endwertermittlung

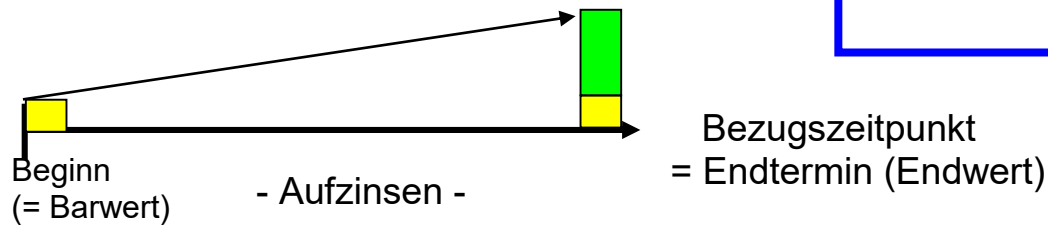
Aufzinsung - Endwertermittlung

Der Endwert ist der Wert, der sich durch Aufzinsung von Einzahlungsströmen und Auszahlungsströmen in der Zukunft ergibt. Dabei können unterschieden werden:

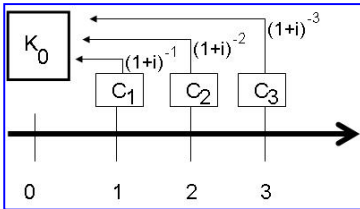
- Der Endwert einer einmaligen Zahlung:



Endwert = Barwert x Aufzinsungsfaktor



Dabei vergrößert sich das im Zeitpunkt 0 betrachtete **Kapital K_0** durch Zins und Zinseszins über den Betrachtungszeitraum hinweg zum Kapital K_n .



Finanzmathematik

Aufzinsung

Unter Zugrundelegung eines bestimmten **Zinssatzes** i ergibt sich folgende Entwicklung:

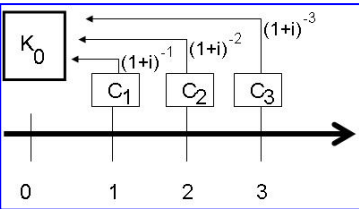
K_0 = Kapital im Zeitpunkt Null	
K_1 = Kapital nach 1. Jahr	$K_1 = K_0 + K_0 \times i = K_0 \times (1 + i)$
K_2 = Kapital nach 2. Jahr	$K_2 = K_1 + K_1 \times i = K_1 \times (1 + i) = K_0 \times (1 + i)^2$
K_3 = Kapital nach 3. Jahr	$K_3 = K_2 + K_2 \times i = K_2 \times (1 + i) = K_0 \times (1 + i)^3$
..	
K_n = Kapital nach n Jahren	$K_n = K_0 \times (1 + i)^n$

Aufzinsungsfaktor = $(1 + i)^n = q^n$



Damit gilt zur Ermittlung des Endwertes einer einmaligen Zahlung:

Endwert = $K_n = K_0 \times q^n$ oder $K_n = K_0 \times (1 + i)^n$



Finanzmathematik

Beispiel zur Aufzinsung

Beispiel Aufzinsung (Endwert einer einmaligen Zahlung)

Ein Unternehmen vergibt einen Kredit über 40.000 €, der in einer Summe nach 4 Jahren zurückgezahlt werden soll. Als Zinssatz wurden 8% vereinbart. Wie hoch ist die Rückzahlungssumme?

$$K_n = K_0 \times (1+i)^n = 40.000 \times 1,08^4 = 40.000 \text{ €} \times 1,36049 = \mathbf{54.419,60 \text{ €}}$$



Hilfsrechnung:

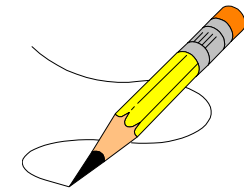
$$1,08^4 = 1,08 \times 1,08 \times 1,08 \times 1,08 = 1,36049 = \mathbf{\text{Aufzinsungsfaktor}}$$

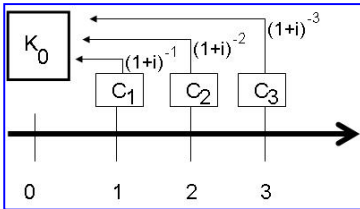
Ü1 Aufzinsung

Ein Unternehmen investiert 100.000 € in die Anschaffung einer Maschine. Die Laufzeit des Kredites beträgt 5 Jahre, der Zinssatz 10%.

Aufgabe:

Wie hoch ist der Zinsaufwand für diesen Kredit?





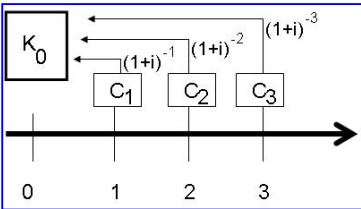
Finanzmathematik

Übung Aufzinsung

Lösung:

$$K_n = K_0 \times (1 + i)^n$$

$$\begin{aligned}
 K_n &= 100.000 \times (1 + 0,10)^5 = && 161.051 \text{ Kapital nach 5 Jahren} \\
 & && - 100.000 \text{ Kredit} \\
 &= && \underline{\underline{61.051}} \text{ Zinsaufwand}
 \end{aligned}$$

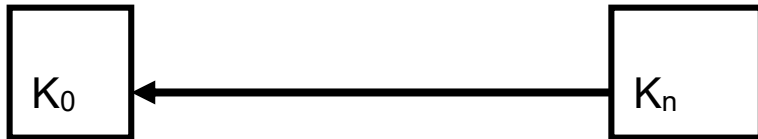


Abzinsung - Barwertermittlung

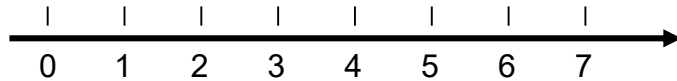
Finanzmathematik

Der Barwert ist der Wert, der sich durch **Abzinsung** zukünftiger Einzahlungsströme oder Auszahlungsströme als **Gegenwartswert** ergibt. Zu unterscheiden sind:

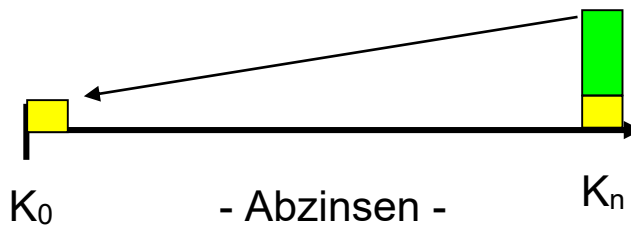
- Der Barwert **einer einmaligen Zahlung**:



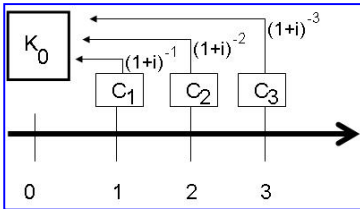
Barwert = Endwert x Abzinsungsfaktor



Bezugszeitpunkt
= (Barwert)



Endtermin
(zukünftiger Zeitwert = Endwert)



Finanzmathematik

Abzinsung - Barwertermittlung

Um das Kapital im Zeitpunkt 0 als K_0 ermitteln zu können, wird die bei der Aufzinsung zum Endwert verwendete Formel nach K_0 aufgelöst:

$K_n = K_0 \times (1+i)^n$ aufgelöst nach:

$$K_0 = \frac{K_n}{(1+i)^n}$$

$(1+i)^n$ Aufzinsungsfaktor

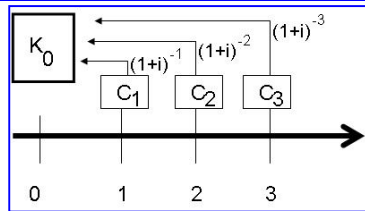
Beispiel Barwertberechnung = Abzinsung:

Ein Anleger benötigt in zwei Jahren 10.000 €. Er möchte wissen, wie viel Geld er heute bei einer Verzinsung von 7% anlegen muss.

Lösung:

$$K_0 = \frac{10.000}{(1 + 0,07)^2} = \frac{10.000}{1,1449} = 8.734,39 \text{ €}$$





Finanzmathematik

Übung Abzinsung

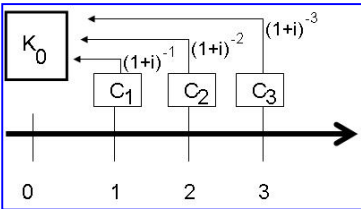


Ü3 Abzinsung

Ein Anleger benötigt in fünf Jahren 20.000 €. Er möchte wissen, wie viel Geld er heute bei einer Verzinsung von 6% anlegen muss.

Aufgabe:

Berechnen Sie das benötigte Anfangskapital!



Finanzmathematik

Übung Abzinsung

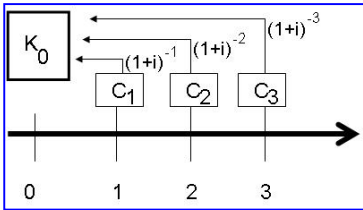
Lösung:

Abzinsungsfaktor aus Tabelle: 0,74726

$$K_0 = 20.000 \times 0,74726 = \mathbf{14.945,20 \text{ €}}$$

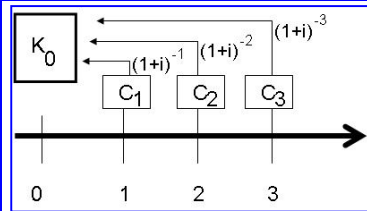
Fazit:

Der Anleger benötigt heute 14.945,20 Euro, um in 5 Jahren 20.000 Euro ausbezahlt zu bekommen.



Finanzmathematik

Abzinsung in der Buchführung



Abzinsung von Verbindlichkeiten in der Buchführung

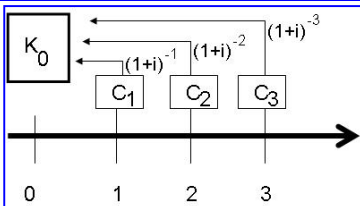
Finanzmathematik

Verbindlichkeiten und Rückstellungen für Verpflichtungen sind grundsätzlich mit ihren **Anschaffungskosten** als Passivposten in der Bilanz auszuweisen, wenn

- die **Restlaufzeit** der Verbindlichkeit oder Rückstellung am Bilanzstichtag **weniger als 12 Monate** beträgt, oder
- die Verbindlichkeit oder Rückstellung **verzinslich** ist, oder
- es sich um eine **Anzahlung** oder **Vorausleistung** handelt.

Ist **keine** dieser drei **Voraussetzungen** erfüllt, ist grundsätzlich ein Abschlag (oder eben eine **Abzinsung**) vorzunehmen.

Abzinsung von Verbindlichkeiten in der Buchführung



Finanzmathematik

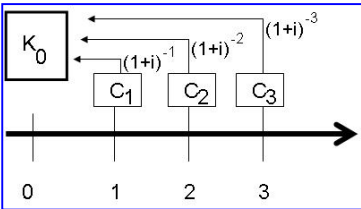
Verbindlichkeiten und Rückstellungen für Verpflichtungen, die keine der vorstehend genannten Voraussetzungen erfüllen, sind **zwingend** mit einem Zinssatz von **5,5 %** abzuzinsen und mit dem sich daraus ergebenden **Barwert** in der Bilanz auszuweisen (§ 6 Abs. 1 Nr. 3, 3a, e EStG).



§ 6 EstG Bewertung

(1) Für die Bewertung der einzelnen Wirtschaftsgüter, die nach § 4 Absatz 1 oder nach § 5 als Betriebsvermögen anzusetzen sind, gilt das Folgende:

3. Verbindlichkeiten sind unter sinngemäßer Anwendung der Vorschriften der Nummer 2 anzusetzen und mit einem **Zinssatz von 5,5 Prozent abzuzinsen**. Ausgenommen von der Abzinsung sind Verbindlichkeiten, deren Laufzeit am Bilanzstichtag weniger als zwölf Monate beträgt, und Verbindlichkeiten, die verzinslich sind oder auf einer Anzahlung oder Vorausleistung beruhen.

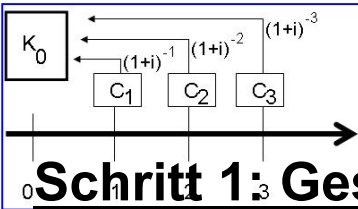


Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

Finanzmathematik

In der EBAWE GmbH stehen zum 31.12.20XX folgende Rückstellungen und Verbindlichkeiten zu Buche:

Rückstellung für	unverzinslich	Restlaufzeit am Bilanzstichtag	Höhe der Rückstellung
1. Pauschale Gewährleistung	Ja	60 Monate	50.000 EUR
2. Konkrete Gewährleistung	Ja	24 Monate	20.000 EUR
3. Steuerschulden	Nein	6 Monate	9.000 EUR
Verbindlichkeiten für			
4. Darlehen eines Geschäftspartners	Ja	60 Monate	80.000 EUR
5. Bankdarlehen	Nein	48 Monate	200.000 EUR
6. Warenkredit	Ja	7 Monate	30.000 EUR
7. Erhaltene Anzahlungen und Vorauszahlungen	Ja	14 Monate	50.000 EUR



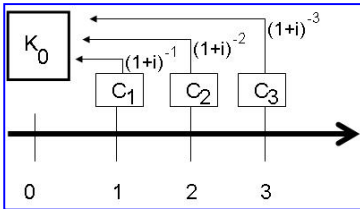
Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

Schritt 1: Gesondert zu bewertende Rückstellungen und Verbindlichkeiten

Finanzmathematik

Im ersten Schritt haben Sie alle unverzinslichen Rückstellungen und Verbindlichkeiten, bei denen am Bilanzstichtag wahrscheinlich ist, dass es nicht innerhalb von 12 Monaten zu einer Zahlung kommt, von den übrigen Verbindlichkeiten und Rückstellungen getrennt. Für folgende Posten ist deshalb eine gesonderte Bewertung zu prüfen:

Rückstellung für	unverzinslich	Restlaufzeit am Bilanzstichtag	Höhe der Rückstellung
1. Pauschale Gewährleistung	Ja	60 Monate	50.000 EUR
2. Konkrete Gewährleistung	Ja	24 Monate	20.000 EUR
Verbindlichkeiten für			
4. Darlehen eines Geschäftspartners	Ja	60 Monate	80.000 EUR
7. Erhaltene Anzahlungen und Vorauszahlungen	Ja	14 Monate	50.000 EUR



Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

Finanzmathematik

Schritt 2: Prüfung des jeweiligen Postens auf Ausnahmeregelungen

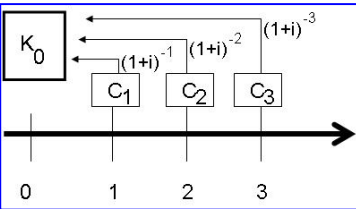
Nach der Vorauswahl prüfen Sie nun - für jeden einzelnen Posten gesondert -, ob eine Abzinsung in Frage kommt oder ob der Gesetzgeber Ausnahmen vorgesehen hat. Hierzu hilft ein Blick in das BMF-Schreiben.

Prüfung Position 1:

Rückstellung für	unverzinslich	Restlaufzeit am Bilanzstichtag	Höhe der Rückstellung
1. Pauschale Gewährleistung	Ja	60 Monate	50.000 EUR

Zwar sind pauschale Rückstellungen für Gewährleistungsverpflichtungen in aller Regel nicht verzinst und die Laufzeit beträgt zwischen zwei und fünf Jahren, dennoch muss ausnahmsweise **keine Abzinsung** vorgenommen werden. So bestimmt es das BMF-Schreiben vom 26.05.2005 in Textziffer 27.

Fazit: Die Rückstellung für pauschale Gewährleistungsverpflichtungen darf in Höhe von 50.000 € gewinnmindernd gebucht werden.



Finanzmathematik

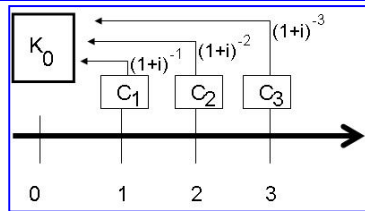
Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

Prüfung Position 2:

Rückstellung für	unverzinslich	Restlaufzeit am Bilanzstichtag	Höhe der Rückstellung
2. Konkrete Gewährleistung	Ja	24 Monate	20.000 EUR

Steht am Bilanzstichtag fest, dass Sie für bestimmte Mängel in Anspruch genommen werden, ist keine pauschale Rückstellung, sondern eine konkrete Einzelrückstellung zu bilden. Für diese Art von Rückstellung gibt es keine Ausnahmeregelung.

Fazit: Da diese Einzelrückstellung unverzinslich ist und am Bilanzstichtag erst mit einer Inanspruchnahme in 24 Monaten zu rechnen ist, **muss eine Abzinsung** vorgenommen werden.



Finanzmathematik

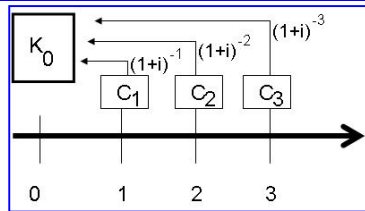
Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

Prüfung Position 3:

Verbindlichkeiten für	unver- zinslich	Restlaufzeit am Bi- lanzstichtag	Höhe der Rückstellung
4. Darlehen eines Geschäfts- partners	Ja	60 Monate (Fällig- keit in einem Be- trag)	80.000 EUR

Insbesondere Darlehen von Geschäftspartnern wird das Finanzamt künftig besonders in Augenschein nehmen. Nicht selten sind diese nämlich wie in unserem Beispielfall unverzinslich und haben eine längere Laufzeit als 12 Monate. Einen Ausnahmetatbestand hat das Bundesfinanzministerium hier nicht geschaffen.

Fazit: Da die Darlehensverbindlichkeit unverzinslich ist und am Bilanzstichtag erst mit einer Inanspruchnahme in 60 Monaten zu rechnen ist, **muss eine Abzinsung** vorgenommen werden.



Finanzmathematik

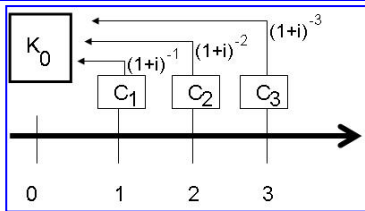
Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

Prüfung Position 4:

Verbindlichkeiten für	unverzinslich	Restlaufzeit am Bilanzstichtag	Höhe der Rückstellung
7. Erhaltene Anzahlungen und Vorauszahlungen	Ja	14 Monate	50.000 EUR

Merke: Für erhaltene Anzahlungen oder für Vorauszahlungen Verbindlichkeiten, ist unabhängig von einer Unverzinslichkeit und der Laufzeit **niemals eine Abzinsung** vorzunehmen (BMF-Schreiben vom 26.05.2005, Textziffer 20).

Fazit: Obwohl Verbindlichkeiten aufgrund erhaltener Anzahlungen oder Vorauszahlungen unverzinslich sind und am Bilanzstichtag erst mit einer Inanspruchnahme in mehr als 12 Monaten zu rechnen ist, muss **keine Abzinsung** vorgenommen werden.



Finanzmathematik

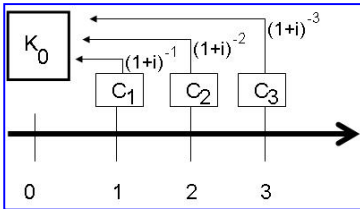
Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

Schritt 3: Laufzeit am Bilanzstichtag bestimmen

Für die noch übrigen und gesondert zu bewertenden Rückstellungen und Verbindlichkeiten müssen Sie nun **schätzen, wann die Zahlung wahrscheinlich erfolgen wird.**

geschätzt wurden:

Rückstellung für	Laufzeit am Bilanzstichtag
2. Konkrete Gewährleistung	24 Monate
Verbindlichkeiten für	
4. Darlehen eines Geschäftspartners	60 Monate



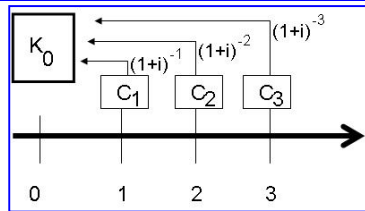
Finanzmathematik

Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

	A	B	C	D	E
2			$AbF = 1 / (1+i)^n$		
3					
4		Jahre	AbF bei Zins von		
5		n	5,5%		Formel:
6		1	0,947867298578199000	→	$= (1 / (1 + C\$5)) ^ B6$
7		2	0,898452415713933000		
8		3	0,851613664183823000		
9		4	0,807216743302201000		
10		5	0,765134353840949000		
11		6	0,725245833024596000		
12		7	0,687436808554120000		
13		8	0,651598870667412000		
14		9	0,617629261296125000		
15		10	0,585430579427607000		
16		11	0,554910501827116000		
17		12	0,525981518319541000		
18		13	0,498560680871603000		
19		14	0,472569365755073000		
20		15	0,447933048109074000		
21					

Schritt 4: Abzinsfaktor ermitteln

Rückstellung für	Abzinsfaktor
2. Konkrete Gewährleistung	24 Monate = 0,898452
Verbindlichkeiten für	
4. Darlehen eines Geschäftspartners	60 Monate = 0,765134



Finanzmathematik

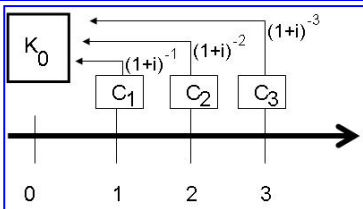
Fallbeispiel Abzinsung Verbindlichkeiten

Schritt 5: Ermittlung der Rückstellung bzw. der Verbindlichkeit

Der Abzinsungsfaktor für die Rückstellung beträgt

$$\begin{aligned} \text{also bei einer Laufzeit von 2 Jahren} & \qquad \qquad \qquad 0,898452 \\ \text{Wert der Rückstellung} & = 20.000 \text{ €} \times 0,898452 = \quad \quad \quad \mathbf{17.969 \text{ €}} \end{aligned}$$

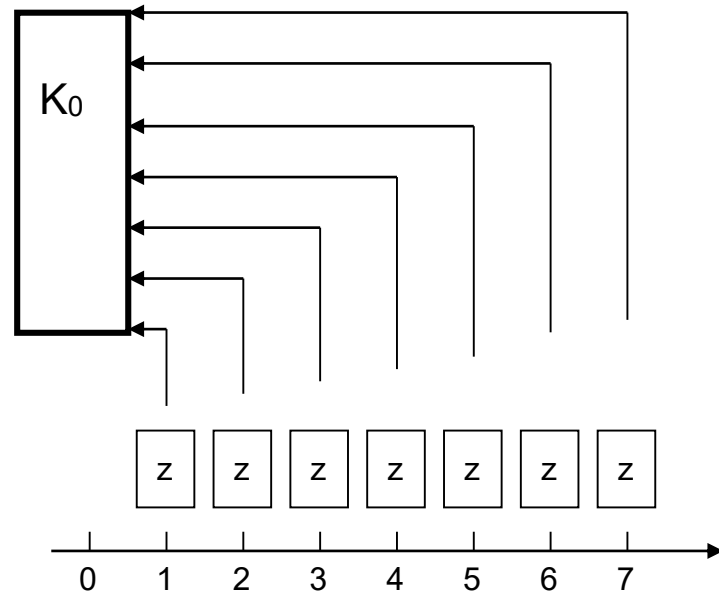
Fazit: Die Rückstellung darf nach der Abzinsung nur noch in Höhe von 17.969 EUR passiviert werden.



Finanzmathematik

Rentenbarwert (BWF)

Der Barwert mehrerer gleich hoher zukünftiger Zahlungen

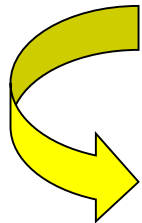


Die Ermittlung des Kapitals im Zeitpunkt 0 erfolgt mit Hilfe des **Barwertfaktors**, der auch **Rentenbarwertfaktor** genannt wird .

Um zu K_0 zu gelangen, werden die zukünftigen gleich hohen Zahlungen (z) mit dem Barwertfaktor multipliziert. Als (Renten-) Barwert ergibt sich:

$$\frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}$$

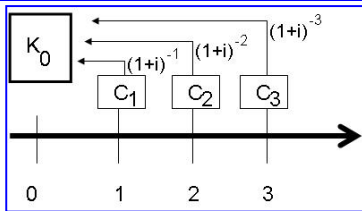
= **Rentenbarwertfaktor**



Rentenbarwert =

$$K_0 = z \times \frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n}$$

i ... Zinssatz
 n ... Laufzeit
 z ... Zahlung [€]



Finanzmathematik

Beispiel Rentenbarwert (BWF)

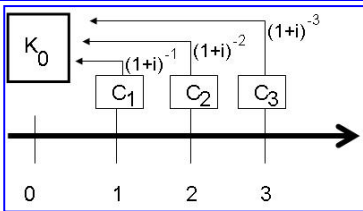
Ein Hausbesitzer bekommt aus einem Mietvertrag jedes Jahr 20.000 € ausgezahlt. Der Mietvertrag läuft über 10 Jahre. Als Zins werden 5% angenommen.

Welche Summe könnte er erhalten, wenn der **gesamte Betrag** der Vermietung gleich zu Beginn des Mietvertrages ausgezahlt wird?



$$K_0 = z \times \frac{(1+i)^n - 1}{i \times (1+i)^n} = 20.000 \text{ €} \times \frac{1,05^{10} - 1}{1,05^{10} \times (1,05 - 1)} = 20.000 \text{ €} \times \frac{0,62889463}{0,08144473}$$

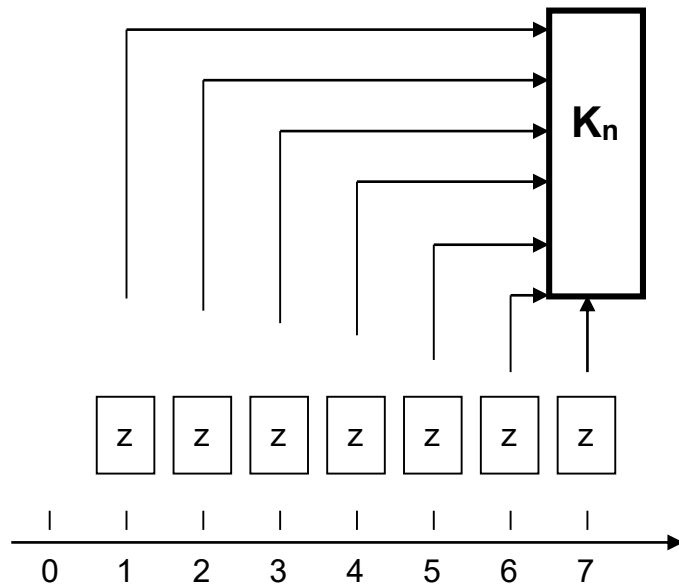
$$K_0 = 154.434,70 \text{ Euro}$$



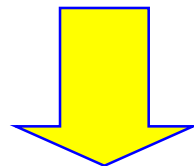
Finanzmathematik

Rentenendwert (EWF)

Der Endwert mehrerer gleich hoher Zahlungen:



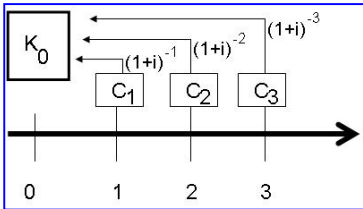
Die mehrmaligen Zahlungen (z) führen zum Kapital K_n , das größer ist als die Summe aller Zahlungen, da Zinsen und Zinseszinsen **zusätzlich** anfallen. Es wird mit Hilfe eines Endwertfaktors ermittelt, indem die jährlich gleich hohe Zahlung (z) mit diesem multipliziert wird.



Endwert des Kapiales

$$K_n = z \times \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

i Zinssatz
 n Laufzeit
 z ... Zahlung [€]



Finanzmathematik

Beispiel Rentenendwert

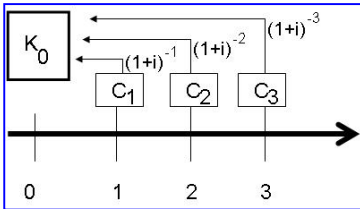
Ein Unternehmen zahlt zum Ende eines jeden Jahres 3.000 € auf ein Konto, das sich mit 3% verzinst. Dies geschieht 8 Jahre lang.

Aufgabe:

Welcher Betrag steht dann zur Verfügung?

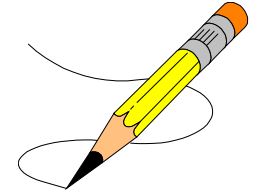
$$K_n = z \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} = 3.000 \text{ €} \times \frac{1,03^8 - 1}{1,03 - 1} = 3.000 \text{ €} \times 8,89234 = \mathbf{26.677,02 \text{ €}}$$

Rentenendwertfaktor



Finanzmathematik

Übung Rentenendwert

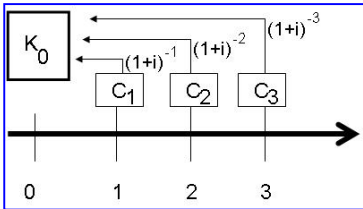


Ü 4 Führerschein

Sven will für seinen Führerschein Geld ansparen. Die Verzinsung seines Sparbuches erfolgt mit 3% p.a. Er will monatlich 50 € auf sein Sparbuch einzahlen.

Aufgabe:

Berechnen Sie, ob diese angesparte Summe ausreichend ist, um nach 4 Jahren 2.400 € für die Fahrschule zu bezahlen.



Finanzmathematik

Übung Rentenendwert

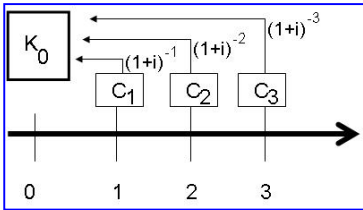
Lösung:

50 € x 12 = 600 € pro Jahr

600 € x EWF 4,18363 = **2.510,18 €**

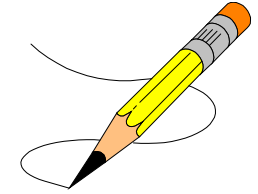
Fazit:

Die angesparte Summe ist ausreichend.



Finanzmathematik

Übung Rentenendwert

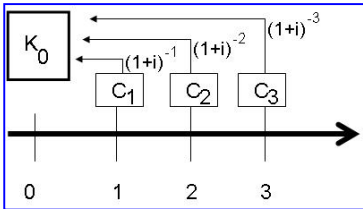


Ü 5 Wohnwagen

Herr Berthold besitzt einen Wohnwagen, den er heute für 20.000 € verkaufen könnte oder 10 Jahre lang für jährlich 2.100 € vermieten könnte. Danach ist der Wagen Schrott. Die Mieteinnahmen bzw. den Verkaufspreis könnte er mit 7% p.a. verzinsen.

Aufgabe:

Berechnen Sie beide Varianten und entscheiden Sie, welche Variante für Herrn Berthold günstiger ist!



Finanzmathematik

Übung Rentenendwert

Lösung:

Variante Verkauf

$$K_{10} = 20.000 \text{ €} \times 1,07^{10} = 39.343,03 \text{ €}$$

Variante Vermietung

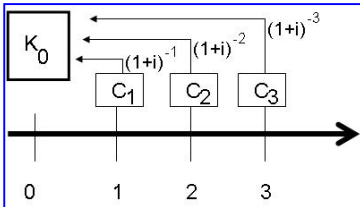
$$K_{10} = 2.100 \text{ €} \times \text{EWF } 13,81645 = 29.014,54 \text{ €}$$

Fazit: Die Variante **Verkauf** ist vorteilhafter!

Oder Rentenbarwert Vermietung mit Verkaufspreis vergleichen:

$$2.100 \text{ €} \times 7,02358 = 14.749,52 \text{ €}$$

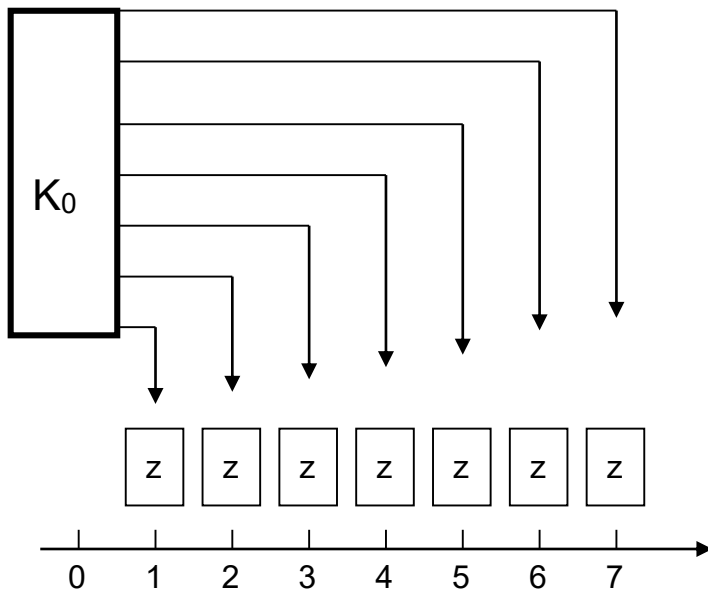
Annuität (Wiedergewinnungsfaktor - KWF)



Finanzmathematik

Mit der Annuität werden für einen bestimmten Betrag die jährlich in gleicher Höhe anfallenden Werte ermittelt. Oder anders formuliert: Die Verteilung eines heute zur Verfügung stehenden Betrages zu gleichen Teilen über eine Anzahl von Jahren unter Berücksichtigung der Zinseszinsen wird durch die Multiplikation mit dem Annuitätenfaktor ermöglicht.

Die Verteilung eines heute zur Verfügung stehenden Betrages:

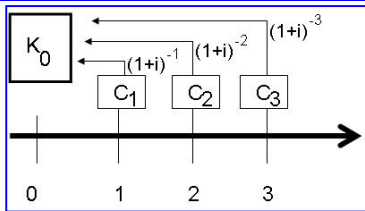


Die verschiedenen Zahlungen (z) entsprechen in ihrer Summe nicht dem Kapital K_0 , da Zinsen und Zinseszinsen anfallen.

Die gleichmäßige Verteilung des Betrages ist mithilfe des **Annuitätenfaktors** möglich, der auch **Wiedergewinnungsfaktor** genannt wird.

KWF - Kapitalwiedergewinnungsfaktor

$$\frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$



Annuität (Wiedergewinnungsfaktor - KWF)

Finanzmathematik

Dabei wird unterstellt, dass die in gleicher Höhe anfallenden Zahlungen zum Ende einer jeden Periode erfolgen. Die **Annuität** (z) ergibt sich, indem der zur Verfügung stehende Betrag mit dem **Wiedergewinnungsfaktor** multipliziert wird:

$$z = K_0 \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1}$$

Beispiel Annuitätenberechnung

Beispiel:

Ein Versicherungsnehmer erhält 200.000 € aus einer Erlebensversicherung an seinem 60. Geburtstag. Diese Summe möchte er 10 Jahre lang als jährliche Rente ausgezahlt bekommen. Die Verzinsung soll 6% betragen.

$$z = K_0 \times \frac{i \times (1+i)^n}{(1+i)^n - 1} = 200.000 \text{ €} \times 1,06^{10} \times \frac{1,06 - 1}{1,06^{10} - 1} = 200.000 \text{ €} \times 0,135867$$

$$z = \mathbf{27.173,40 \text{ €}}$$

D:\BmU_Kursmaterial\FACHGEBIETE\F - Finanzierung-Investierung\F2 - Investitionsrechnung\F2 - Investitionsrechnung 2019\Folien- Finanzmathematik Vers.100K19.docx